Curso de Termodinâmica-GFI 04116

1º semestre de 2007

Prof. Jürgen Stilck

Solução do exercício 2-9

A representação do ciclo no diagrama (V, p) é:

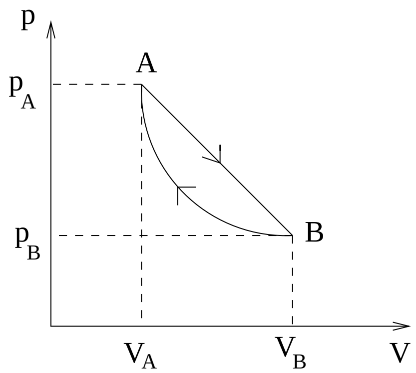

Figura 1: O ciclo discutido no exercício

Trata-se de um gás ideal, logo:

$$U = NcT = \frac{c}{R} pV$$

e

$$pV = NRT. \tag{1}$$

Vamos considerar os dois processos do ciclo:

Processo AB:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\, dV.$$

A função $p(V)$ é linear, ou seja:

$$p = p_A - \alpha(V - V_A), \tag{2}$$

onde definimos:

$$\alpha = \frac{p_a - p_b}{V_b - V_A}. \tag{3}$$

Efetuando a integral, obtemos:

$$W_{AB} = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A).$$

Da primeira lei, temos:

$$Q_{AB} = \Delta U + W_{AB} = \frac{c}{R}(p_B V_B - p_A V_A) + \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A).$$

Processo BA:

Como o processo é adiabático, $Q_{BA} = 0$ e

$$W_{BA} = -\Delta U = U_B - U_A = \frac{c}{R}(p_B V_B - p_A V_A).$$

Note que no ciclo todo a energia se conserva, ou seja, $Q_{AB} - W_{AB} - W_{BA} = 0$.

Temos, agora, uma questão sutil: o enunciado de Kelvin da segunda lei da termodinâmica diz que é impossível construir uma máquina térmica que converta todo o calor recebido em trabalho, entretanto à primeira vista o calor recebido no trecho AB do ciclo se converte no trabalho $W = W_{AB} + W_{BA}$, em aparente contradição com a segunda lei. A origem desse aparente paradoxo está no fato de que, apesar do gás receber o calor Q_{AB} no processo AB, ele recebe calor quando inicia sua expansão em V_A, mas *cede* parte do calor recebido no trecho final de sua expansão. Isto fica mais claro se considerarmos adiabáticas a entropias maiores que $S_A = S_B$, esquematizadas na figura 2. Inicialmente cada adiabática é cortada duas vezes pela reta que representa o processo, mostrando que a entropia não varia monotonicamente. Ela atinge seu valor máximo no ponto C, que corresponde ao ponto em que a adiabática tangencia a reta AB. O diagrama (S, T) do processo, na figura 3, também ajuda a entender o que ocorre. Usando a equação (1) e a expressão (2) e (3), podemos obter a temperatura como função do volume no processo AB:

$$T = T_A \frac{V}{V_A} \left(1 - \alpha \frac{V - V_A}{p_A} \right),$$

que diminui com o aumento do volume. Veja também que, como $dQ = Tds$, o gás recebe calor no trecho AC e perde calor no trecho CB do processo linear.

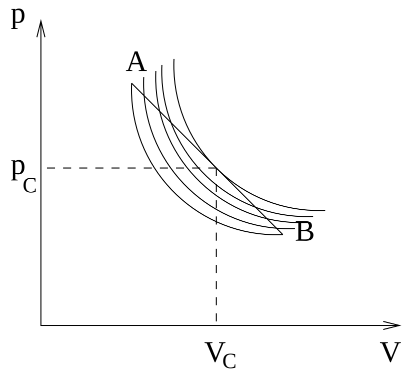

Figura 2: O processo linear AB e algumas curvas adiabáticas.

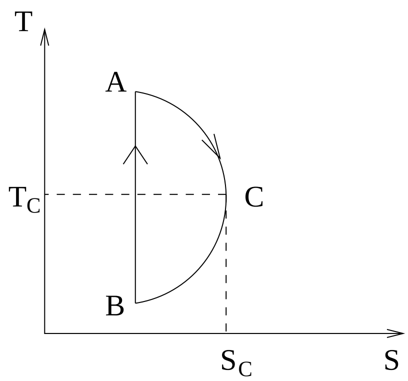

Figura 3: Representação do ciclo num diagrama (S, T).

Vamos chamar de V_C o volume do estado C, que separa o trecho em que o gás recebe calor daquele em que ele perde calor. Vamos calcular o calor recebido pelo gás numa expansão de V_A até um volume $V \leq V_C$:

$$Q = \Delta U + W \frac{c}{R}(pV - p_A V_A) + \frac{p + p_A}{2}(V - V_A).$$

Substituindo $p(V)$, dado pela equação 2 chegamos a:

$$Q(V) = a(V - V_A) - b(V - V_A)^2, \tag{4}$$

onde

$$a = \frac{c}{R}(p_A - \alpha V_A) + p_A \tag{5}$$

e

$$b = \alpha\left(\frac{c}{R} + \frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

Podemos chamar $\Delta V = V - V_A$, e esboçamos na figura 2 a curva $Q(\Delta V)$.

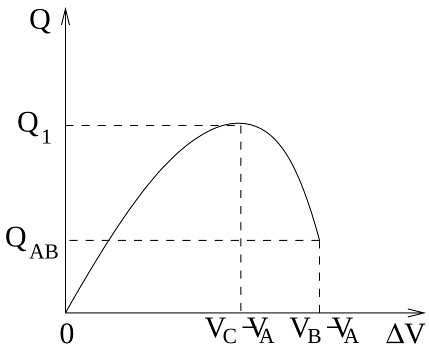

Figura 4: O calor recebido pelo gás no processo linear AB

Notamos que o calor *recebido* pelo gás no ciclo é Q_1, representado no gráfico, correspondendo a $V = V_C$. O calor cedido será $Q_2 = Q_{AB} - Q_1$, que é negativo. Para encontrarnos Q_1 derivamos Q na expressão 4 em relação a ΔV e igualamos a zero, o que nos fornece:

$$V_C - V_A = \frac{a}{2b},$$

e subtituindo esse valor na equação, obtemos:

$$Q_1 = \frac{a^2}{4b}.$$

O rendimento do ciclo será dado por:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{Q_1 - Q_{AB}}{Q_1} = \frac{Q_{AB}}{Q_1} = \frac{W}{Q_1}.$$

Substituíndo as expressões:

$$\eta = \frac{4b\left[\frac{c}{R}(p_B V_B - p_A V_A) + \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)\big)\right]}{a^2},$$

onde a e b estão definidos na equação (5) e (6). Substituíndo a, b e α na expressão para η, podemos obter uma expressão em termos das pressões e dos volumes, e se lembrarmos que $p_B = p_A(V_A/V_B) * *\gamma$, podemos eliminar p_B nessa expressão.